

Esercizi di Informatica Teorica

Grammatiche formali

a cura di

Luca Cabibbo e Walter Didimo

Sommario

- richiami teorici sulle grammatiche di Chomsky
- esercizi vari
- esercizi su grammatiche ed espressioni regolari
- esercizi su grammatiche non regolari

notazioni sul livello degli esercizi: (*) facile, (**) non difficile
(***) media complessità, (****) difficile, (*****) quasi impossibile

Grammatiche di Chomsky

grammatica formale: $G = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$ dove

- $V_T \subseteq \Sigma$ è l'insieme dei simboli terminali (alfabeto terminale)
- V_N è l'insieme dei simboli non terminali (categorie sintattiche), disgiunto da Σ
- P è l'insieme delle produzioni (regole sintattiche), una relazione binaria di cardinalità finita su: $(V_T \cup V_N)^* \cdot V_N \cdot (V_T \cup V_N)^* \times (V_T \cup V_N)^*$

notazione: $\langle \alpha, \beta \rangle \in P$ si scrive anche $\alpha \rightarrow \beta$

- $S \in V_N$ è l'assioma

Linguaggi e forme di frase

il linguaggio generato da una grammatica $G = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$ è l'insieme delle stringhe di soli simboli terminali ottenibili applicando una sequenza di produzioni a partire dall'assioma

esempio: sia G tale che $V_T = \{a, b\}$, $V_N = \{A, S\}$,

produzioni di P : $S \rightarrow A$

$A \rightarrow bAb$

$A \rightarrow a$

$L(G) = \{b^n a b^n : n \geq 0\}$ (linguaggio generato da G)

una qualunque stringa ottenuta da S applicando un numero finito di produzioni è detta forma di frase

Tipi di grammatiche

- grammatica di tipo 0 (non limitate)
 $\alpha \rightarrow \beta$ con $\alpha \in V^* \cdot V_N \cdot V^*$, $\beta \in V^*$ dove $V = (V_T \cup V_N)$
- grammatica di tipo 1 (contestuali)
 $\alpha \rightarrow \beta$ con $\alpha \in V^* \cdot V_N \cdot V^*$, $\beta \in V^+$ e $|\alpha| \leq |\beta|$
- ipotesi: ϵ -produzioni solo sull'assioma e con assioma mai a destra
- grammatiche di tipo 2 (non contestuali)
 $\alpha \rightarrow \beta$ con $\alpha \in V_N$, $\beta \in V^+$
- grammatiche di tipo 3 (regolari)
 $\alpha \rightarrow \beta$ con $\alpha \in V_N$, $\beta \in (V_T \cdot V_N) \cup V_T$

Esercizi vari svolti

Esercizio 1(**): si consideri la seguente grammatica G

- $V_T = \{a,b\}$, $V_N = \{S, A\}$, $S =$ assioma
- produzioni
 - (1) $S \rightarrow a$
 - (2) $S \rightarrow aA$
 - (3) $A \rightarrow a$
 - (4) $A \rightarrow aA$
 - (5) $A \rightarrow b$
 - (6) $A \rightarrow bA$

svolgere ciascuno dei seguenti punti:

- a) di che tipo è la grammatica ?
- b) mostrare una derivazione per “abba” ed una per “baab”
- c) qual'è il linguaggio generato da G ?

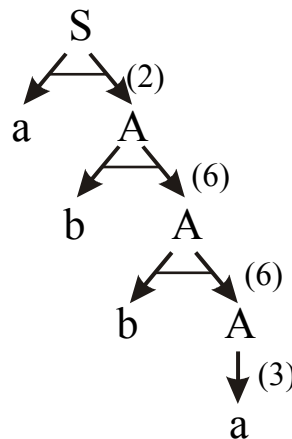
Esercizi vari svolti

Soluzione:

a) regolare

b) - derivazione per “abba”

- \underline{S}
 $\Rightarrow^2 a\underline{A}$
 $\Rightarrow^6 ab\underline{A}$
 $\Rightarrow^6 abb\underline{A}$
 $\Rightarrow^3 abba$



albero di derivazione

- la stringa “baab” non è generata dalla grammatica

c) il linguaggio delle stringhe su {a,b} che iniziano per ‘a’

Esercizi vari svolti

Esercizio 2(***): si consideri la seguente grammatica G non contestuale

• $V_T = \{a\}$, $V_N = \{S, A\}$, $S =$ assioma

• produzioni

(1) $S \rightarrow AA$

(2) $A \rightarrow AAA$

(4) $A \rightarrow a$

svolgere ciascuno dei seguenti punti:

a) mostrare due diverse derivazioni per “aaaaa” e due per “aaaa”

b) qual’è il linguaggio generato da G ?

c) esiste una grammatica regolare che genera lo stesso linguaggio?

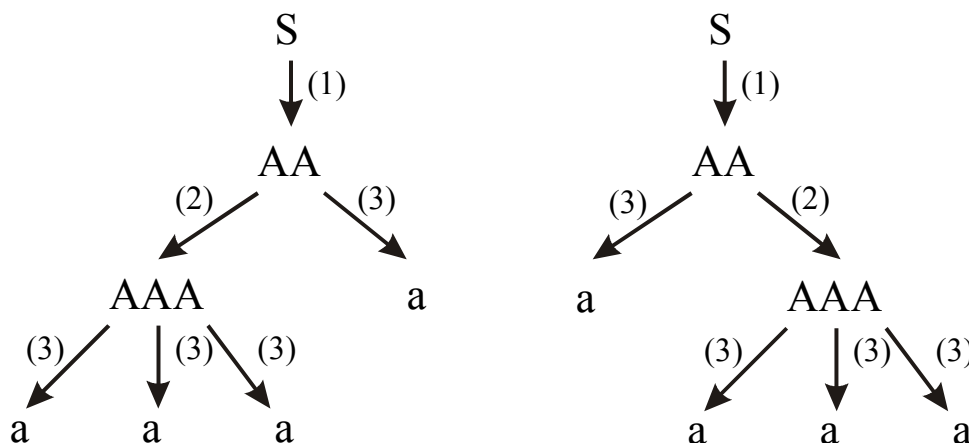
Esercizi vari svolti

Soluzione:

- a) - non esistono derivazioni per “aaaaa”
 - derivazioni per “aaaa”

$$\underline{S} \Rightarrow^1 \underline{AA} \Rightarrow^2 \underline{AAAA} \Rightarrow^3 a\underline{AAA} \Rightarrow^3 aa\underline{AA} \Rightarrow^3 aaa\underline{A} \Rightarrow^3 aaaa$$

$$\underline{S} \Rightarrow^1 \underline{AA} \Rightarrow^3 a\underline{A} \Rightarrow^2 a\underline{AAA} \Rightarrow^3 a\underline{AA}a \Rightarrow^3 aa\underline{A}a \Rightarrow^3 aaaa$$



Esercizi vari svolti

Soluzione:

- b) l'insieme delle stringhe su $\{a\}$ di lunghezza non nulla e con un numero pari di 'a'

- c) una grammatica regolare che genera lo stesso linguaggio è la seguente:

- $V_T = \{a\}$, $V_N = \{S, A, X\}$, $S =$ assioma

- produzioni

$$(1) S \rightarrow aA$$

$$(2) A \rightarrow a$$

$$(4) X \rightarrow aA$$

$$(3) A \rightarrow aX$$

Esercizi vari svolti

Esercizio 3(**): si consideri la seguente grammatica G

- $V_T = \{a, b, c\}$, $V_N = \{S, X\}$, $S =$ assioma
- produzioni
 - (1) $S \rightarrow X$
 - (2) $S \rightarrow \varepsilon$
 - (3) $X \rightarrow aXa$
 - (4) $X \rightarrow bXb$
 - (5) $X \rightarrow c$

svolgere ciascuno dei seguenti punti:

- a) di che tipo è la grammatica ?
- b) mostrare alcune stringhe generate dalla grammatica
- c) qual'è il linguaggio generato da G ?

Esercizi vari svolti

Soluzione:

- a) non contestuale
- b) “c”, “aca”, “abcba”, “bcb”, “babaabcbaabab”, ...

esempio: derivazione di “abcba”:

$$\underline{S} \Rightarrow^1 \underline{X} \Rightarrow^3 a\underline{X}a \Rightarrow^4 ab\underline{X}ba \Rightarrow^5 abcba$$

- c) il linguaggio delle stringhe palindrome su $\{a, b, c\}$ con una ed una sola ‘c’ al centro, più la stringa vuota

Esercizi vari da svolgere

Esercizio 4(**): si consideri la seguente grammatica G non contestuale

• $V_T = \{a,b\}$, $V_N = \{S, A, B\}$, $S =$ assioma

• produzioni

(1) $S \rightarrow A$

(2) $S \rightarrow B$

(3) $A \rightarrow a$

(4) $A \rightarrow aA$

(5) $A \rightarrow bA$

(6) $B \rightarrow b$

(7) $B \rightarrow aB$

(8) $B \rightarrow bB$

svolgere ciascuno dei seguenti punti:

a) mostrare una derivazione per “abba” ed una per “baab”

b) qual’è il linguaggio generato da G ?

Esercizi vari da svolgere

Esercizio 5(**): si consideri la seguente grammatica G

• $V_T = \{a,b\}$, $V_N = \{S, A\}$, $S =$ assioma

• produzioni

(1) $S \rightarrow AA$

(2) $A \rightarrow AAA$

(3) $A \rightarrow a$

(4) $A \rightarrow bA$

(5) $A \rightarrow Ab$

svolgere ciascuno dei seguenti punti:

a) di che tipo è la grammatica?

b) mostrare alcune derivazione per “babbab”

b) qual’è il linguaggio generato da G ?

Esercizi vari da svolgere

Esercizio 6(***): si consideri la seguente grammatica G

- $V_T = \{a,b\}$, $V_N = \{S, T, A, B\}$, $S =$ assioma
- produzioni
 - (1) $S \rightarrow AT$
 - (2) $T \rightarrow AT$
 - (3) $T \rightarrow ABT$
 - (4) $T \rightarrow \varepsilon$
 - (5) $AB \rightarrow BA$
 - (6) $BA \rightarrow AB$
 - (7) $A \rightarrow a$
 - (8) $B \rightarrow b$

svolgere ciascuno dei seguenti punti:

- a) di che tipo è la grammatica?
- b) verificare che G genera tutte e sole le stringhe su $\{a,b\}$ tali che il numero di 'a' è maggiore del numero di 'b'

Grammatiche ed espressioni regolari (esercizi svolti)

Esercizio 7(***): sia L il linguaggio descritto dall'espressione regolare $a(a+b)^*b$:

- a) mostrare una grammatica (di qualsiasi tipo) che genera L
- b) esiste una grammatica regolare che genera L ?

Soluzione:

a) G non contestuale per L

- $V_T = \{a,b\}$, $V_N = \{S, X\}$, $S =$ assioma
- produzioni
 - (1) $S \rightarrow aXb$
 - (2) $X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$

Grammatiche ed espressioni regolari (esercizi svolti)

b) esiste una grammatica regolare per L poiché l'espressione che descrive L è regolare; una grammatica regolare per L è la seguente

- $V_T = \{a,b\}$, $V_N = \{S, X\}$, $S =$ assioma
- produzioni
 - (1) $S \rightarrow aX$
 - (2) $X \rightarrow b$
 - (3) $X \rightarrow aX$
 - (4) $X \rightarrow bX$

Esercizio 8 (***) : mostrare una grammatica che genera l'insieme di tutte le espressioni regolari su $\{a,b\}$

Grammatiche ed espressioni regolari (esercizi svolti)

Soluzione:

G non contestuale per L

- $V_T = \{a, b, \emptyset, +, \cdot, *, (,)\}$, $V_N = \{S\}$, $S =$ assioma
- produzioni
 - (1) $S \rightarrow (S)$
 - (2) $S \rightarrow a \mid b$
 - (3) $S \rightarrow S + S \mid S \cdot S$
 - (4) $S \rightarrow S^*$
 - (5) $S \rightarrow \emptyset$

nota: G non tiene conto delle precedenze tra operatori

Grammatiche ed espressioni regolari (esercizi svolti)

Esercizio 9(*)**: qual'è il linguaggio generato dalla seguente grammatica? Quali sono i significati dei vari non terminali?

- $V_T = \{a, b, \emptyset, +, \bullet, *, (,)\}$, $V_N = \{S, E, T, F, A\}$, $S =$ assioma
- produzioni
 - (1) $S \rightarrow E$
 - (2) $E \rightarrow \emptyset \mid T \mid T + T \mid$
 - (3) $T \rightarrow F \mid F \bullet F$
 - (4) $F \rightarrow (E) \mid A \mid F^*$
 - (5) $A \rightarrow a \mid b$

Grammatiche ed espressioni regolari (esercizi svolti)

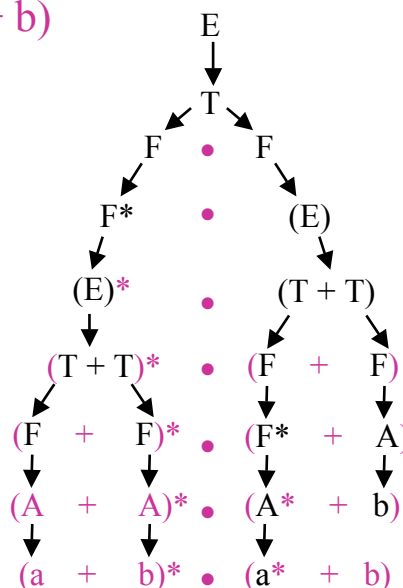
Soluzione ancora il linguaggio delle espressioni regolari su $\{a,b\}$, ma tiene conto delle precedenze tra operatori; **esempio di derivazione**: $(a + b)^* \bullet (a^* + b)$

E = espressione

T = termine

F = fattore

A = atomo



Grammatiche non regolari (esercizi svolti)

Esercizio 10 (***) : sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{2n} : n > 0\}$

(a) mostrare una grammatica non contestuale che genera L

(b) mostrare una grammatica (strettamente) contestuale che genera L

Soluzione

(a) grammatica non contestuale

• $V_T = \{a, b\}$, $V_N = \{S, X\}$, S = assioma

• produzioni

(1) $S \rightarrow X$

(2) $X \rightarrow aXbb \mid abb$

Grammatiche non regolari (esercizi svolti)

(b) grammatica strettamente contestuale (ne esistono di più semplici)

• $V_T = \{a, b\}$, $V_N = \{S, X, L, R, A, B\}$, S = assioma

• produzioni

(1) $S \rightarrow LR \mid LXR$

(2) $X \rightarrow XX \mid ABB$

(3) $BA \rightarrow AB$

(4) $LA \rightarrow aL$

(5) $BR \rightarrow Rb$

(6) $LR \rightarrow abb$

L = delimitatore sinistro, R = delimitatore destro,

X = generatore di sequenze "ABB";

nota: la (3) serve a far scorrere le B a destra e le A a sinistra

Grammatiche non regolari (esercizi svolti)

Esercizio 11 (****): sia dato il linguaggio $L = \{1^{2^n} : n \geq 0\}$;

mostrare una grammatica non limitata che genera L

Soluzione

- logica costruttiva

si supponga di partire da una forma di frase del tipo “LAA...AAR”, in cui il numero di ‘A’ è pari a 2^n ; si vuol ideare un meccanismo che consenta di prendere, ad ogni decisione, due strade distinte:

- trasformare tutte le ‘A’ in ‘1’ ed eliminare ‘L’ ed ‘R’
- raddoppiare il numero di ‘A’, cioè passare alla forma di frase “LAAA...AAAR” dove il numero di A è pari a 2^{n+1}

Grammatiche non regolari (esercizi svolti)

- grammatica non limitata

- $V_T = \{1\}$, $V_N = \{S, L, R, A, D, U, X, B\}$, S = assioma

- produzioni

(1) $S \rightarrow LAR$

(2) $L \rightarrow U$

(3) $UA \rightarrow 1U$

(4) $UR \rightarrow \varepsilon$

} trasforma le A in 1

(5) $L \rightarrow XD$

(6) $DA \rightarrow AAD$

(7) $DR \rightarrow BR$

(8) $AB \rightarrow BA$

(9) $XB \rightarrow L$

} raddoppia le A

Grammatiche varie (esercizi da svolgere)

Esercizio 12 (***) : mostrare una grammatica regolare per ciascuna delle seguenti espressioni regolari

- $a(b + aa)^* a$
- $(ba)^* b^* (ab)^*$

Esercizio 13 (***) : mostrare una grammatica che genera il linguaggio dei numeri pari in base 3; esiste una grammatica regolare per tale linguaggio?